

Quetzal Integrador

Temas a Evaluar

El arsenal del integrador: ocho técnicas, dieciséis ejemplos resueltos y un plan de entrenamiento para competir en el Quetzal Integrador

Comité Organizador del Quetzal Integrador

Sede: Liceo Dr. Ricardo Bressani · Cobán, Alta Verapaz, Guatemala · 2026

Resumen. Este documento presenta el temario del *Quetzal Integrador*, competencia guatemalteca de cálculo integral. Reúne las ocho técnicas que pueden aparecer en la competencia: antiderivadas elementales, sustitución u, integración por partes, sustitución trigonométrica, uso de identidades trigonométricas, fracciones parciales y dos técnicas extra para integrales definidas (la propiedad del rey y la simetría de las funciones pares e impares). Cada técnica se desarrolla en una página que explica la idea que la sustenta y el procedimiento para aplicarla; después se resuelven, paso a paso, dos ejemplos de cada técnica, dieciséis en total. El documento cierra con recomendaciones para una buena participación; se recomienda, además, que cada participante complemente esta guía con estudio por cuenta propia.

Palabras clave: antiderivada, sustitución, integración por partes, identidades trigonométricas, fracciones parciales, propiedad del rey, paridad, integral definida.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

1 Antiderivadas elementales 2
Integrales definidas: cómo se evalúan 3
2 Sustitución u 4
3 Integración por partes 5
4 Sustitución trigonométrica 6
5 Identidades trigonométricas 7
6 Fracciones parciales 8
7 Propiedad del rey 9
8 Funciones pares e impares 10

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS

Técnicas 1, 2 y 3 11
Técnicas 4, 5 y 6 14
Técnicas 7 y 8 17

PARTE III · PARA COMPETIR

9 Recomendaciones 19

«Derivar es una técnica; integrar es un arte.» $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

PARTE I · LAS TÉCNICAS

1 Antiderivadas elementales

Integrar es deshacer una derivada. Decimos que F es una *antiderivada* de f en un intervalo si $F'(x) = f(x)$ para todo x de ese intervalo. Como la derivada de una constante es cero, si F es una antiderivada también lo es $F + C$ para cualquier constante C; y en un intervalo *todas* las antiderivadas tienen esa forma. Por eso la *integral indefinida* representa a la familia completa; de ahí viene la constante de integración C.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad\Longleftrightarrow\quad F'(x)=f(x), \qquad \int [a\,f(x)+b\,g(x)]\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx.$$

La segunda propiedad (*linealidad*) permite integrar término a término y sacar constantes. Cada regla de derivación, leída de derecha a izquierda, produce una regla de integración. Estas son las que deben saberse de memoria:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x\tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x+\tan x| + C \qquad \int \csc x\,dx = -\ln|\csc x+\cot x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

Integrales definidas. El Teorema Fundamental del Cálculo conecta la antiderivada con el área: si f es continua en $[a,b]$ y $F'=f$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$. La página siguiente explica con detalle cómo se evalúan.

Reescribir antes de integrar. Muchas integrales elementales no lo parecen a primera vista. Antes de pensar en una técnica avanzada: expande productos, separa fracciones $\left(\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)$ y escribe raíces y cocientes como potencias $\left(\sqrt{x} = x^{1/2},\ \frac{1}{x^3} = x^{-3}\right)$. Por ejemplo,

$$\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int \left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Cuidado. No existe una regla para integrar productos o cocientes directamente: en general $\int f\,g\,dx \neq \int f\,dx \cdot \int g\,dx$. Y toda integral se puede comprobar en segundos: *deriva tu respuesta y debes recuperar el integrando.* **Sobre la constante:** en la competencia no es necesario escribir $+C$ en las respuestas (tampoco se penaliza); en este documento se incluye por rigor matemático.

PARTE I · HERRAMIENTA PARA TODAS LAS TÉCNICAS

$\int_a^b$ Integrales definidas: cómo se evalúan

Una integral indefinida es una *familia de funciones*; una integral definida es un **número**. El símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área entre la gráfica de f y el eje x, desde $x=a$ hasta $x=b$ (las partes bajo el eje cuentan como negativas). El Teorema Fundamental del Cálculo dice cómo calcular ese número:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b)-F(a), \qquad \text{donde } F \text{ es cualquier antiderivada de } f.$$

Cómo se evalúa, paso a paso

1. **Halla una antiderivada** $F(x)$ con la técnica que corresponda. No se escribe $+C$, porque se cancelaría: $(F(b)+C)-(F(a)+C)=F(b)-F(a)$.
2. **Escríbela entre corchetes** con los límites, $\big[F(x)\big]_a^b$, que significa «evaluar arriba, evaluar abajo y restar».
3. **Sustituye el límite superior y luego el inferior**, cada uno en su propio paréntesis, y resta. Por ejemplo:

$$\int_0^{\pi/2}(\cos x+2x)\,dx = \Big[\operatorname{sen}x+x^2\Big]_0^{\pi/2} = \underbrace{\left(\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\pi^2}{4}\right)}_{\text{en } x=\pi/2} - \underbrace{\left(\operatorname{sen}0+0^2\right)}_{\text{en } x=0} = 1+\frac{\pi^2}{4}.$$

Aquí el segundo paréntesis vale 0, pero *no siempre* es así: $\int_0^1 e^x dx = e^1-e^0 = e-1$, porque $e^0=1$. Por eso siempre se escriben las dos evaluaciones. Valores que conviene saber:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	no existe

Otros valores frecuentes

$e^0=1$, $\ln 1=0$, $\ln e=1$

$\arctan 0=0$, $\arctan 1=\frac{\pi}{4}$

$\operatorname{arc\,sen}0=0$, $\operatorname{arc\,sen}1=\frac{\pi}{2}$

Con sustitución: dos caminos válidos

Los límites a y b son valores de x. Al sustituir hay dos formas correctas de manejarlos; se ilustran con $\int_0^1 2x\,(x^2+1)^3\,dx$, donde $u=x^2+1$ y $du=2x\,dx$.

- **Camino 1: cambiar los límites.** Se convierte cada límite a la nueva variable con la misma sustitución: si $x=0$, $u=0^2+1=1$; si $x=1$, $u=1^2+1=2$. La integral queda toda en u y ya no se regresa a x:

$$\int_0^1 2x\,(x^2+1)^3\,dx = \int_1^2 u^3\,du = \Big[\frac{u^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{16}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.$$

- **Camino 2: regresar a x.** Se resuelve la indefinida, se regresa a x y se usan los límites originales:

$$\int 2x\,(x^2+1)^3\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4}+C \quad\Longrightarrow\quad \Big[\frac{(x^2+1)^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{16}{4}-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}.$$

Regla de oro. Los límites deben estar siempre en la misma variable que el diferencial: límites de x con dx, de u con du, de θ con $d\theta$. Mezclarlos es el error más común.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

2 Sustitución u

La sustitución u es la regla de la cadena leída al revés. Si $F' = f$, la regla de la cadena dice que $\dfrac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))\, g'(x)$. Integrando ambos lados se obtiene la fórmula del cambio de variable:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C, \qquad \text{con } u = g(x), \quad du = g'(x)\, dx.$$

La clave es detectar una función «interior» $g(x)$ cuya derivada $g'(x)$ también aparezca como factor en el integrando (salvo, quizá, una constante). El cambio convierte una integral complicada en x en una integral sencilla en u.

Procedimiento

1. **Elige $u = g(x)$.** Buenos candidatos: lo que está dentro de una raíz, de un exponente, de un paréntesis elevado a una potencia, el argumento de una función trigonométrica o un denominador.
2. **Calcula** $du = g'(x)\, dx$ y compara con lo que tienes en el integrando.
3. **Reescribe toda la integral en términos de u.** No debe quedar ninguna x ni ningún dx.
4. **Integra** respecto a u.
5. **Regresa a x** sustituyendo $u = g(x)$ (en integrales indefinidas).

Por ejemplo, en $\int 2x \cos(x^2)\, dx$ tomamos $u = x^2$, $du = 2x\, dx$, y entonces

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C = \operatorname{sen}(x^2) + C.$$

Si falta una constante, se compensa. En $\int x\, e^{x^2} dx$, con $u = x^2$ se tiene $du = 2x\, dx$, es decir, $x\, dx = \frac{1}{2}\, du$, y la integral es $\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$. Solo las *constantes* pueden compensarse así; si lo que falta es un factor variable, esa elección de u no sirve.

Si sobra una x, se despeja. A veces, después de sustituir, quedan factores en x. Se despejan de la propia sustitución: si $u = x + 1$, entonces $x = u - 1$ (véase el ejemplo 2.1).

Integrales definidas: los límites también cambian. Al pasar a u, los límites deben ser valores de u, y ya no hace falta regresar a x:

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

Patrones que conviene reconocer al instante (todos son sustituciones $u = f(x)$ o $u = ax + b$):

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln|f(x)| + C \qquad \int f(x)^n f'(x)\, dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\, dx = e^{f(x)} + C \qquad \int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (F' = f)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C \quad (a > 0)$$

PARTE I · LAS TÉCNICAS

3 Integración por partes

Si la sustitución invierte la regla de la cadena, la integración por partes invierte la regla del producto. De $(uv)' = u'v + uv'$, al integrar ambos lados resulta $uv = \int v\,du + \int u\,dv$, es decir:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du \qquad \text{y, con límites,} \qquad \int_a^b u\,dv = \Big[\,uv\,\Big]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

La fórmula no resuelve la integral: la *cambia* por otra, $\int v\,du$, que debe ser más sencilla. La habilidad está en repartir el integrando entre u (la parte que se *deriva*) y dv (la parte que se *integra*).

¿Cómo elegir u? La regla LIATE. Toma como u el tipo de función que aparezca primero en esta lista, y como dv todo lo demás: **L**ogarítmicas → **I**nversas trigonométricas → **A**lgebraicas → **T**rigonométricas → **E**xponenciales. La razón: las primeras se simplifican al derivarlas ($\ln x \to \frac{1}{x}$, los polinomios bajan de grado) y las últimas son fáciles de integrar.

Ejemplo. En $\int x\cos x\,dx$ tomamos $u = x$ (algebraica) y $dv = \cos x\,dx$; entonces $du = dx$ y $v = \operatorname{sen} x$:

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Dos casos especiales. (1) *Un solo factor:* si el integrando es $\ln x$, $\arctan x$ o $\operatorname{arc\,sen} x$, se toma $dv = dx$; así $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$. (2) *Integrales cíclicas:* en $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$ o $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, tras aplicar partes dos veces reaparece la integral original; se le llama I y se despeja como en una ecuación (ejemplo 3.2).

Atajo: el método de la tabla

Cuando el integrando es un *polinomio* multiplicado por e^{ax}, $\operatorname{sen} ax$ o $\cos ax$, hay que aplicar partes una vez por cada grado del polinomio. La tabla hace todas esas rondas de una sola vez. Se ilustra con $\int x^2\cos x\,dx$:

1. **Columna D (derivar).** Arriba va el polinomio; se deriva hacia abajo hasta llegar a 0.
2. **Columna I (integrar).** Arriba va el otro factor; se integra hacia abajo, una vez por cada renglón.
3. **Flechas diagonales.** Cada renglón de D se une con el renglón *siguiente* de I. Los signos se alternan: $+$, $-$, $+$, …
4. **Respuesta.** Se suman los productos de cada flecha, cada uno con su signo.

D		I
x^2	$+$ ↘	$\cos x$
$2x$	$-$ ↘	$\operatorname{sen} x$
2	$+$ ↘	$-\cos x$
0		$-\operatorname{sen} x$

Leyendo las tres flechas, de arriba hacia abajo:

$$\int x^2\cos x\,dx = +\,x^2(\operatorname{sen} x) \;-\; 2x\,(-\cos x) \;+\; 2\,(-\operatorname{sen} x) + C = x^2\operatorname{sen} x + 2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + C.$$

¿Por qué funciona? Cada flecha es una aplicación de la fórmula: su producto es el «uv» de esa ronda, y el signo se alterna por el menos de $-\int v\,du$. Se termina cuando la columna D llega a 0, porque la integral que quedaría es $\int 0\,dx$. **Cuidado:** la tabla solo termina si uno de los factores es un polinomio.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

4 Sustitución trigonométrica

Esta técnica está diseñada para integrales que contienen $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ o $\sqrt{x^2-a^2}$ (o potencias de estas expresiones), con $a>0$. **La idea:** reemplazar x por una función trigonométrica elegida de modo que una identidad pitagórica convierta lo que está bajo la raíz en un cuadrado perfecto, y la raíz desaparezca. Es una sustitución «al revés»: en lugar de $u=g(x)$, se propone $x=g(\theta)$.

Si aparece	Sustitución	Diferencial	Identidad que se usa	La raíz se vuelve
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\operatorname{sen}\theta$	$dx=a\cos\theta\,d\theta$	$1-\operatorname{sen}^2\theta=\cos^2\theta$	$a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta$	$dx=a\sec^2\theta\,d\theta$	$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$	$a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta$	$dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$	$\sec^2\theta-1=\tan^2\theta$	$a\tan\theta$

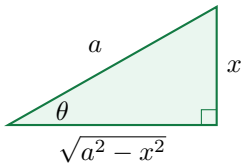
Por ejemplo, con $x=a\operatorname{sen}\theta$: $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$. (Se toma θ en el intervalo donde la función trigonométrica es invertible y la raíz resulta positiva; por ejemplo, $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ para el seno.)

Procedimiento

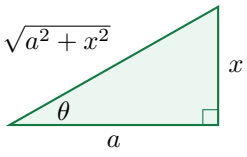
1. **Identifica la forma** y el valor de a (por ejemplo, en $\sqrt{9-x^2}$ es $a=3$).
2. **Sustituye** x y dx, y simplifica la raíz con la identidad correspondiente.
3. **Integra** la expresión trigonométrica que resulta (con las herramientas de la sección 5).
4. **Regresa a** x con un triángulo rectángulo construido a partir de la sustitución.

El triángulo de regreso

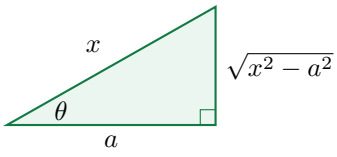
La sustitución define una razón trigonométrica; con ella se rotulan dos lados del triángulo y el tercero se obtiene por Pitágoras. De ahí se lee cualquier función de θ en términos de x; el ángulo mismo es $\theta=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a}$, $\arctan\frac{x}{a}$ o $\operatorname{arcsec}\frac{x}{a}$, según el caso.



$x=a\operatorname{sen}\theta:\quad \operatorname{sen}\theta=\dfrac{x}{a}$



$x=a\tan\theta:\quad \tan\theta=\dfrac{x}{a}$



$x=a\sec\theta:\quad \sec\theta=\dfrac{x}{a}$

En integrales definidas conviene cambiar los límites a valores de θ; así se evita el paso 4 (véase el ejemplo 4.2).

Antes de usarla, revisa dos cosas. (1) Si una sustitución u sencilla resuelve la integral, úsala: $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ sale de inmediato con $u=1-x^2$. (2) Si la expresión cuadrática no está en forma estándar, completa el cuadrado primero: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$, y luego usa $u=x+1$ con $a=2$.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

5 Uso de identidades trigonométricas

Los productos y potencias de funciones trigonométricas casi nunca se integran «tal como vienen». **La idea:** transformar el integrando con identidades hasta que aparezca una integral de la tabla básica o una sustitución u evidente. Saber las identidades de memoria es lo que da velocidad en la competencia.

Las 10 identidades más importantes

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$
5. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$
6. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
7. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
8. $\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
9. $\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
10. Producto a suma: $\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) + \operatorname{sen}(A-B)]$, $\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$.

Estrategias según la forma de la integral

Integral	Caso	Qué hacer
$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$	m impar	Aparta un $\operatorname{sen} x$, convierte el resto con $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ y usa $u = \cos x$.
	n impar	Aparta un $\cos x$, convierte el resto con $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ y usa $u = \operatorname{sen} x$.
	m y n pares	Reduce potencias con las identidades 8 y 9.
$\int \tan^m x \sec^n x\, dx$	n par ($n \geq 2$)	Aparta $\sec^2 x$, convierte las demás secantes con la identidad 2 y usa $u = \tan x$.
	m impar	Aparta $\sec x \tan x$, convierte con $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ y usa $u = \sec x$.
$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$	ángulos distintos	Aplica producto a suma (identidad 10); igual con $\operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx$ y $\cos ax \cos bx$.

«Apartar» un factor es reservarlo para que sea el du de la sustitución: si $u = \cos x$, se necesita un $\operatorname{sen} x\, dx$. Dos usos directos de identidades:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C, \qquad \int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tan x - x + C.$$

Truco del conjugado. Cuando aparece $1 \pm \operatorname{sen} x$ o $1 \pm \cos x$ en el denominador, multiplica arriba y abajo por el conjugado: $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x} = \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \sec^2 x - \sec x \tan x$, y entonces $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \tan x - \sec x + C$.

PARTE I · LAS TÉCNICAS

6 Fracciones parciales

Esta técnica integra *funciones racionales*, es decir, cocientes de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Se apoya en un resultado preciso del álgebra, que es la operación inversa de sumar fracciones:

Teorema de descomposición. Si el grado de P es menor que el de Q, la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se puede escribir, de una única manera, como suma de *fracciones simples*. Cada factor de $Q(x)$ aporta los términos de esta tabla, donde A, B, $A_1, A_2, \ldots$ son *números* que hay que calcular:

Factor de $Q(x)$	**Términos que aporta**
Lineal: $(x-a)$	$\dfrac{A}{x-a}$
Lineal repetido: $(x-a)^k$	$\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$
Cuadrático irreducible (sin raíces reales): x^2+bx+c	$\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$

¿De dónde salen los números? Un ejemplo completo

Descompongamos $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$. El denominador tiene dos factores lineales distintos, así que el teorema garantiza que existen dos números A y B, todavía desconocidos, tales que

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Para hallarlos se multiplican ambos lados por $(x-1)(x+2)$, lo que elimina los denominadores y deja $1 = A(x+2) + B(x-1)$, una igualdad válida para *todo* valor de x. Por eso conviene elegir los valores de x que anulan uno de los términos:

$$x=1: \quad 1 = A(3)+B(0) \;\Rightarrow\; A = \tfrac{1}{3}; \qquad\qquad x=-2: \quad 1 = A(0)+B(-3) \;\Rightarrow\; B = -\tfrac{1}{3}.$$

Por eso aparece $\frac{1}{3}$ en los numeradores: es el valor de A, y $-\frac{1}{3}$ es el de B (al sumar las dos fracciones simples se recupera la original). Ahora cada una se integra de inmediato como un logaritmo:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} \quad\Longrightarrow\quad \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C.$$

Procedimiento general

0. **Revisa los grados.** Si el grado de P no es menor que el de Q, divide primero los polinomios y aplica el teorema a la fracción que queda con el residuo.
1. **Factoriza $Q(x)$ y plantea la descomposición** con la tabla, con una letra distinta en cada numerador.
2. **Multiplica por $Q(x)$ y halla las letras:** sustituye las raíces de Q y, si hace falta, iguala los coeficientes de cada potencia de x en ambos lados.
3. **Integra cada fracción simple:** $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C$; las potencias $\frac{A}{(x-a)^k}$ se integran con la regla de la potencia, y los factores cuadráticos dan logaritmos y arcotangentes (véase el ejemplo 6.2).

Atajo: el método de «tapar». Con factores lineales *distintos*, el número de $\frac{A}{x-a}$ se obtiene tapando $(x-a)$ en la fracción original y evaluando el resto en $x=a$. En el ejemplo: $A = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$ y $B = \frac{1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$. Es la misma sustitución de raíces, hecha mentalmente.

PARTE I · TÉCNICA EXTRA PARA INTEGRALES DEFINIDAS

7 La propiedad del rey (*King's property*)

Esta técnica no busca una antiderivada: aprovecha la **simetría** del intervalo. Solo se aplica a integrales *definidas*, y resuelve en pocas líneas integrales cuya antiderivada es muy difícil o no es elemental.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx \qquad \text{en particular,} \qquad \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$$

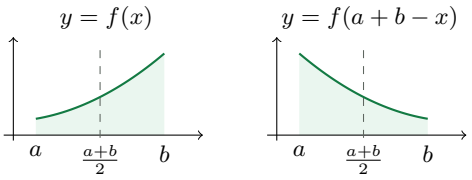
En palabras: *cada* x se cambia por $a+b-x$ (la suma de los límites menos x) y el valor no cambia.

¿Por qué es cierta?

Es una sustitución: con $u = a+b-x$ se tiene $du = -dx$, y los límites se intercambian ($x=a \Rightarrow u=b$; $x=b \Rightarrow u=a$). El signo menos regresa los límites a su orden:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(u)\,(-du) = \int_a^b f(u)\,du = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Geométricamente, cambiar x por $a+b-x$ refleja la gráfica como en un espejo colocado en el punto medio del intervalo. La curva cambia, pero el área bajo ella es la misma.



El paso clave: de dónde sale $2I$

La propiedad rara vez da el resultado por sí sola. Se usa así:

1. **Se le pone nombre a la integral.** Llamamos I al número que buscamos: $\displaystyle I = \int_a^b f(x)\,dx.$ (1)
2. **Se aplica la propiedad.** El *mismo* número I también se escribe: $\displaystyle I = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$ (2)
3. **Se suman (1) y (2), lado con lado.** A la izquierda queda $I+I=2I$. A la derecha, como las dos integrales tienen los mismos límites, se juntan en una sola:
$$2I = \int_a^b \big[f(x) + f(a+b-x)\big]\,dx.$$
4. **Se integra y se divide entre** 2 para obtener I: el $2I$ no es más que la integral sumada consigo misma.

¿Para qué sumar? Porque $f(x)$ sola puede ser muy difícil de integrar, pero la suma $f(x)+f(a+b-x)$ a menudo se simplifica muchísimo, incluso a una constante.

Ejemplo mínimo. Sea $I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,dx$. Aquí $a+b-x = \frac{\pi}{2} - x$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x$, así que la propiedad da $I = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$. Al sumar las dos expresiones:

$$2I = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2} \quad\Longrightarrow\quad I = \frac{\pi}{4}.$$

Señales para intentarla: límites 0 y $\frac{\pi}{2}$ (intercambia senos y cosenos) o 0 y π; integrandos de la forma $\frac{g(x)}{g(x)+g(a+b-x)}$, que siempre dan $I = \frac{b-a}{2}$. A veces la propiedad da directamente una ecuación como $I = k - I$, de la que se despeja I (ejemplo 7.2).

PARTE I · TÉCNICA EXTRA PARA INTEGRALES DEFINIDAS

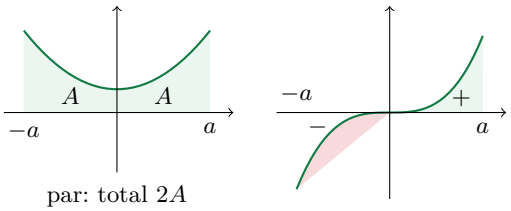
8 Funciones pares e impares (*odd/even*)

Esta técnica aprovecha la simetría de la *función* cuando el intervalo de integración es simétrico respecto al origen, es decir, de la forma $[-a, a]$. Igual que la propiedad del rey, solo sirve para integrales definidas.

Una función es **par** si $f(-x) = f(x)$ para todo x: su gráfica es simétrica respecto al eje y. Ejemplos: x^2, x^4, $\cos x$, $|x|$, e^{-x^2} y las constantes.

Es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para todo x: su gráfica es simétrica respecto al origen. Ejemplos: x, x^3, $\operatorname{sen} x$, $\tan x$, $\arctan x$.

Muchas funciones no son pares ni impares, como e^x o $x + 1$.



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{si } f \text{ es par,} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \text{si } f \text{ es impar.}$$

¿Por qué es cierta?

Se parte la integral en $x = 0$ y, en la mitad izquierda, se sustituye $x = -t$ (entonces $dx = -dt$; cuando $x = -a$, $t = a$; cuando $x = 0$, $t = 0$):

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \qquad \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt.$$

Si f es par, $f(-t) = f(t)$: la mitad izquierda es igual a la derecha y el total es el doble. Si f es impar, $f(-t) = -f(t)$: la mitad izquierda es el negativo de la derecha y el total es 0.

Cómo reconocer la paridad

Sustituye x por $-x$ y simplifica: si regresa $f(x)$, es par; si regresa $-f(x)$, es impar. Por ejemplo, para $f(x) = x^3 \cos x$ se tiene $f(-x) = (-x)^3 \cos(-x) = -x^3 \cos x = -f(x)$: es impar. Para combinaciones:

par × par = par	par + par = par	una función de una función par es par:
impar × impar = par	impar + impar = impar	por ejemplo, $e^{\cos x}$ o $\frac{1}{1+x^4}$
par × impar = impar	par + impar: ninguna de las dos	los cocientes siguen la regla del producto

Procedimiento

(1) Verifica que el intervalo sea simétrico, $[-a, a]$. (2) Separa el integrando en sumandos y clasifica cada uno. (3) Elimina los sumandos impares: integran 0. (4) En los pares, duplica la integral de 0 a a. Por ejemplo, $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^3 + x^2)dx = 0 + 2\int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$.

Fórmula puente. El argumento de arriba prueba algo más general: para *cualquier* función continua, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]\,dx$. Sirve cuando f no es par ni impar, pero $f(x) + f(-x)$ se simplifica (véase el ejemplo 8.2).

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 1

1 Antiderivadas elementales

Ejemplo 1.1 · Calcular $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

Paso 1. Reescribir como suma de potencias. No hay regla para cocientes, así que expandimos el cuadrado y dividimos cada término entre $\sqrt{x} = x^{1/2}$ (al dividir potencias se restan los exponentes):

$$\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^{1/2}} = x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2}.$$

Paso 2. Integrar término a término con la regla de la potencia $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$. Sumar 1 a cada exponente da $\frac{5}{2}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{2}$; dividir entre ellos equivale a multiplicar por $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{3}$ y 2:

$$\int (x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2})dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - 2\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C.$$

Paso 3. Respuesta. $\displaystyle\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2} + 2\sqrt{x} + C$

Comprobación: al derivar, cada exponente baja y cancela su coeficiente: $x^{3/2} - 2x^{1/2} + x^{-1/2}$, el integrando reescrito.

Ejemplo 1.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

Paso 1. Reescribir el cociente. El numerador y el denominador tienen el mismo grado, así que conviene separar. Un atajo: sumar y restar 1 en el numerador,

$$\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

Paso 2. Hallar una antiderivada. Los dos términos están en la tabla básica: $F(x) = x - \arctan x$.

Paso 3. Evaluar: arriba menos abajo. Como $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ (porque $\tan\frac{\pi}{4} = 1$) y $\arctan 0 = 0$:

$$\Big[x - \arctan x\Big]_0^1 = \underbrace{\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)}_{\text{en } x=1} - \underbrace{(0-0)}_{\text{en } x=0} \quad\Longrightarrow\quad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Comprobación de sensatez: el integrando es positivo en $(0,1]$ y el resultado también lo es ($1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.215$).

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 2

2 Sustitución u

Ejemplo 2.1 · Calcular $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}\,dx$

Paso 1. Elegir u. La función interior es lo que está dentro de la raíz: $u = x+1$, con $du = dx$.

Paso 2. Despejar lo que sobra. Después de sustituir la raíz todavía queda una x suelta. Se despeja de la propia sustitución: $x = u-1$. Entonces

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,du = \int (u^{3/2} - u^{1/2})du.$$

Paso 3. Integrar en u con la regla de la potencia:

$$\int (u^{3/2} - u^{1/2})du = \frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{2}{3}u^{3/2} + C.$$

Paso 4. Regresar a x.

$$\boxed{\int x\sqrt{x+1}\,dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C}$$

Lección: la sustitución sirve aunque la derivada de u no aparezca «exacta»; lo que sobra se expresa en términos de u.

Ejemplo 2.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

Paso 1. Elegir u. Aparece $\operatorname{sen} x$ dentro de otra expresión y su derivada, $\cos x$, está como factor: $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$.

Paso 2. Cambiar los límites. Los límites 0 y $\frac{\pi}{2}$ son valores de x. Se convierten a valores de u con la misma sustitución $u = \operatorname{sen} x$:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; u = \operatorname{sen} 0 = 0, \qquad x = \tfrac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; u = \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Paso 3. Reescribir todo en u. El numerador $\cos x\,dx$ es du; el denominador es $1+u^2$; los límites ahora son 0 y 1:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0.$$

Paso 4. Respuesta.

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4}}$$

Lección: al cambiar los límites nunca hubo que regresar a x. Mezclar límites de x con una integral en u es un error clásico.

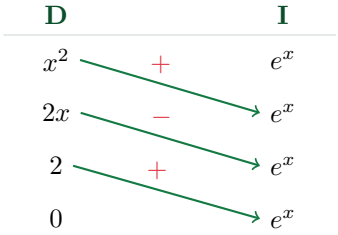
PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 3

3 Integración por partes

Ejemplo 3.1 · Calcular $\int x^2 e^x\,dx$ (método de la tabla)

Paso 1. Reconocer el caso. Es un polinomio (x^2) por una exponencial: según LIATE, $u = x^2$ se deriva y e^x se integra. Como x^2 tiene grado 2, harían falta dos rondas de partes; la tabla las hace juntas.

Paso 2. Armar la tabla. En D se deriva x^2 hasta llegar a 0; en I se integra e^x una vez por renglón; las flechas van en diagonal con signos alternados.



Flecha	Signo	Producto
$x^2 \to e^x$ (primera)	$+$	$+\,x^2e^x$
$2x \to e^x$ (segunda)	$-$	$-\,2x\,e^x$
$2 \to e^x$ (tercera)	$+$	$+\,2\,e^x$

Paso 3. Sumar los productos y factorizar e^x: $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2x\,e^x + 2e^x + C$, es decir,

$$\int x^2 e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

Sin la tabla se llega a lo mismo aplicando la fórmula dos veces: $\int x^2e^x dx = x^2e^x - \int 2x\,e^x dx = x^2e^x - (2x\,e^x - \int 2e^x dx)$.

Ejemplo 3.2 · Calcular $\int e^x \cos x\,dx$ (integral cíclica)

Paso 1. Nombrar la integral y aplicar partes. Sea $I = \int e^x \cos x\,dx$. Con $u = \cos x$ y $dv = e^x dx$ se tiene $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ y $v = e^x$:

$$I = e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x)\,dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\,dx.$$

Paso 2. Aplicar partes otra vez, con la misma elección de papeles. En la nueva integral, $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = e^x dx$, así que $du = \cos x\,dx$ y $v = e^x$:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - I.$$

Paso 3. Despejar I. Reapareció la integral original. Sustituyendo en el paso 1:

$$I = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - I \quad\Longrightarrow\quad 2I = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x).$$

Paso 4. Respuesta (la constante se agrega al final):

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{2} + C$$

Lección: en una integral cíclica se mantiene la misma elección en las dos rondas (aquí, u siempre trigonométrica); si se intercambian los papeles, se llega a $I = I$.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 4

4 Sustitución trigonométrica

Ejemplo 4.1 · Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Paso 1. Identificar la forma. Es $\sqrt{a^2-x^2}$ con $a=2$: se usa $x = 2\operatorname{sen}\theta$. Antes de sustituir, se calcula cada pieza por separado:

$$dx = 2\cos\theta\,d\theta, \qquad x^2 = 4\operatorname{sen}^2\theta, \qquad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta.$$

Paso 2. Sustituir cada pieza en su lugar. El dx va en el numerador; x^2 y la raíz, en el denominador. El factor $2\cos\theta$ se cancela:

$$\int \frac{2\cos\theta\,d\theta}{(4\operatorname{sen}^2\theta)(2\cos\theta)} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\,d\theta.$$

Paso 3. Integrar con la tabla básica ($\int \csc^2\theta\,d\theta = -\cot\theta + C$): el resultado es $-\frac{1}{4}\cot\theta + C$.

Paso 4. Regresar a x con el triángulo. De $\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2}$: cateto opuesto x, hipotenusa 2 y, por Pitágoras, cateto adyacente $\sqrt{4-x^2}$. Entonces $\cot\theta = \dfrac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}} = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

Paso 5. Respuesta.

$$\boxed{\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C}$$

Ejemplo 4.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$

Paso 1. Identificar la forma. $(1+x^2)^{3/2} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3$ es del tipo $\sqrt{a^2+x^2}$ con $a=1$: se usa $x = \tan\theta$.

Paso 2. Calcular cada pieza por separado. Hay tres cosas que cambiar: el diferencial, la expresión del denominador y los límites.

- *Diferencial:* derivando $x = \tan\theta$ se obtiene $dx = \sec^2\theta\,d\theta$.
- *Denominador:* $1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, así que $(1+x^2)^{3/2} = (\sec^2\theta)^{3/2} = \sec^3\theta$.
- *Límites:* si $x = 0$, $\tan\theta = 0$ y $\theta = 0$; si $x = 1$, $\tan\theta = 1$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Paso 3. Sustituir cada pieza en su lugar. El dx estaba en el numerador, así que ahí queda $\sec^2\theta\,d\theta$; en el denominador queda $\sec^3\theta$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta} = \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sec\theta} = \int_0^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta.$$

Paso 4. Integrar y evaluar (arriba menos abajo):

$$\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi/4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}0 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Lección: al cambiar los límites a θ no hizo falta el triángulo de regreso.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 5

5 Uso de identidades trigonométricas

Ejemplo 5.1 · Calcular $\int \cos^3 x\,dx$ (potencia impar)

Paso 1. Elegir la estrategia. La potencia del coseno es impar: apartamos un $\cos x$ (será parte del du) y convertimos el $\cos^2 x$ restante con la identidad 1:

$$\cos^3 x = \cos^2 x\,\cos x = (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x.$$

Paso 2. Sustituir. Con $u = \operatorname{sen} x$ se tiene $du = \cos x\,dx$, justo el factor apartado:

$$\int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx = \int (1-u^2)\,du.$$

Paso 3. Integrar y regresar a x.

$$u - \frac{u^3}{3} + C \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int \cos^3 x\,dx = \operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C}$$

Lección: una potencia impar siempre deja «un factor para el du» y una potencia par que se convierte con la identidad pitagórica.

Ejemplo 5.2 · Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x\,dx$ (potencias pares)

Paso 1. Elegir la estrategia. No hay potencia impar que apartar, así que se usan identidades de ángulo doble. Por la identidad 6, $\operatorname{sen} x\cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$; entonces

$$\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = (\operatorname{sen} x\cos x)^2 = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x.$$

Paso 2. Reducir la potencia. La identidad 8 con ángulo $2x$ da $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$:

$$\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Paso 3. Integrar término a término (con $\int \cos 4x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$):

$$\int_0^{\pi/2}\Big(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x\Big)dx = \Big[\frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32}\Big]_0^{\pi/2}.$$

Paso 4. Evaluar: arriba menos abajo. En $x = \frac{\pi}{2}$ el ángulo es $4x = 2\pi$ y $\operatorname{sen} 2\pi = 0$; en $x = 0$, $\operatorname{sen} 0 = 0$:

$$\Big(\frac{\pi}{16} - 0\Big) - (0-0) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{16}}$$

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 6

6 Fracciones parciales

Ejemplo 6.1 · Calcular $\displaystyle\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}\,dx$ (factores lineales distintos)

Paso 1. Revisar grados y factorizar. El grado del numerador (1) es menor que el del denominador (2): no hay que dividir. Además, $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$.

Paso 2. Plantear la descomposición. Dos factores lineales distintos:

$$\frac{5x-4}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\quad\Longrightarrow\quad 5x-4=A(x+1)+B(x-2).$$

Paso 3. Hallar las constantes sustituyendo las raíces del denominador:

$$x=2:\ \ 6=3A\ \Rightarrow\ A=2;\qquad x=-1:\ \ -9=-3B\ \Rightarrow\ B=3.$$

(Con el método de «tapar»: $A=\frac{5(2)-4}{2+1}=2$ y $B=\frac{5(-1)-4}{-1-2}=3$.)

Paso 4. Integrar cada fracción simple.

$$\boxed{\int \frac{5x-4}{x^2-x-2}\,dx=2\ln|x-2|+3\ln|x+1|+C}$$

Comprobación: $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}=\frac{2(x+1)+3(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{5x-4}{x^2-x-2}$.

Ejemplo 6.2 · Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$ (factor cuadrático irreducible)

Paso 1. Revisar grados y factorizar. Grado 2 sobre grado 3: no hay que dividir. $x^3+x=x(x^2+1)$, y x^2+1 es irreducible porque no tiene raíces reales.

Paso 2. Plantear la descomposición. El factor cuadrático lleva numerador lineal:

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\quad\Longrightarrow\quad x^2+x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)\,x.$$

Paso 3. Hallar las constantes. Con $x=0$: $1=A$. Para las demás, se ordena el lado derecho, $(A+B)x^2+Cx+A$, y se igualan los coeficientes con los de x^2+x+1:

$$x^2:\ \ 1=A+B\ \Rightarrow\ B=0;\qquad x:\ \ 1=C.$$

Paso 4. Integrar cada fracción simple. Quedan dos integrales de la tabla básica:

$$\frac{x^2+x+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx=\ln|x|+\arctan x+C}$$

Comprobación: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)+x}{x(x^2+1)}=\frac{x^2+x+1}{x^3+x}$.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 7

7 Propiedad del rey

Ejemplo 7.1 · **Calcular** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{2026} x}{\operatorname{sen}^{2026} x + \cos^{2026} x}\, dx$

Paso 1. Reconocer la señal. Buscar una antiderivada es impensable, pero los límites son 0 y $\frac{\pi}{2}$ y hay senos y cosenos mezclados: es terreno de la propiedad del rey.

Paso 2. Aplicar la propiedad. Aquí $a+b-x = \frac{\pi}{2} - x$, y como $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ y $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{sen} x$, el cambio intercambia senos y cosenos:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2026} x}{\cos^{2026} x + \operatorname{sen}^{2026} x}\, dx.$$

Paso 3. Sumar las dos expresiones de I. A la izquierda queda $I + I = 2I$. A la derecha, las dos integrales se juntan en una; las fracciones tienen el mismo denominador y sus numeradores suman exactamente ese denominador:

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^{2026} x + \cos^{2026} x}{\operatorname{sen}^{2026} x + \cos^{2026} x}\, dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

Paso 4. Dividir entre 2. $\boxed{I = \dfrac{\pi}{4}}$

Lección: el exponente 2026 no importó; el resultado es $\frac{\pi}{4}$ para cualquier exponente. La simetría, no el cálculo, resolvió la integral.

Ejemplo 7.2 · **Calcular** $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx$

Paso 1. Aplicar la propiedad. Con $a+b-x = \frac{\pi}{4} - x$: $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\Big(1 + \tan\big(\tfrac{\pi}{4} - x\big)\Big) dx$.

Paso 2. Simplificar con la tangente de una resta. Como $\tan\frac{\pi}{4} = 1$,

$$\tan\Big(\frac{\pi}{4} - x\Big) = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \quad\Longrightarrow\quad 1 + \tan\Big(\frac{\pi}{4} - x\Big) = \frac{(1 + \tan x) + (1 - \tan x)}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x}.$$

Paso 3. Usar la propiedad del logaritmo $\ln\frac{p}{q} = \ln p - \ln q$. La integral original reaparece con signo contrario:

$$I = \int_0^{\pi/4} \big[\ln 2 - \ln(1 + \tan x)\big] dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 - I.$$

Paso 4. Despejar. Se pasa I al lado izquierdo y se divide entre 2:

$$2I = \frac{\pi}{4}\ln 2 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan x)\, dx = \frac{\pi}{8}\ln 2}$$

Lección: la antiderivada de $\ln(1 + \tan x)$ no es elemental; aun así, la integral definida se obtuvo en cuatro líneas.

PARTE II · EJEMPLOS RESUELTOS DE LA TÉCNICA 8

8 Funciones pares e impares

Ejemplo 8.1 · Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{2}\Big(x^3\cos x+\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^4}+3x^2\Big)dx$

Paso 1. Reconocer la señal. El intervalo $[-2,2]$ es simétrico: antes de integrar nada, se revisa la paridad de cada sumando.

Paso 2. Clasificar.

- $x^3\cos x$: impar $\times$ par $=$ **impar**.
- $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+x^4}$: impar entre par $=$ **impar**.
- $3x^2$: **par**.

Paso 3. Eliminar los impares y duplicar el par. Los dos primeros sumandos integran 0 sin necesidad de calcular nada:

$$\int_{-2}^{2}\Big(x^3\cos x+\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^4}+3x^2\Big)dx=0+0+2\int_{0}^{2}3x^2\,dx=2\Big[x^3\Big]_0^2=2\cdot 8=\boxed{16}$$

Lección: integrar $x^3\cos x$ exigiría tres rondas de partes, y $\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^4}$ no tiene antiderivada elemental. La paridad hizo innecesario todo ese trabajo.

Ejemplo 8.2 · Calcular $I=\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+e^x}\,dx$ **(fórmula puente)**

Paso 1. Reconocer la señal. El intervalo es simétrico, pero $f(x)=\frac{\cos x}{1+e^x}$ no es par ni impar. Probamos la fórmula puente: $I=\displaystyle\int_0^{\pi/2}[f(x)+f(-x)]dx$.

Paso 2. Calcular $f(-x)$. Como $\cos(-x)=\cos x$, y multiplicando arriba y abajo por e^x:

$$f(-x)=\frac{\cos x}{1+e^{-x}}=\frac{e^x\cos x}{e^x+1}.$$

Paso 3. Sumar. Los denominadores coinciden y el factor $1+e^x$ se cancela:

$$f(x)+f(-x)=\frac{\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x\cos x}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)\cos x}{1+e^x}=\cos x.$$

Paso 4. Integrar. $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\Big[\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2}=1\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos x}{1+e^x}\,dx=1}$

Lección: el truco funciona con cualquier función par $g(x)$ en lugar de $\cos x$: $\int_{-a}^{a}\frac{g(x)}{1+e^x}\,dx=\int_0^a g(x)\,dx$. Es la propiedad del rey en un intervalo simétrico, donde $a+b-x=-x$.

PARTE III · PARA COMPETIR

9 Recomendaciones para una buena participación

Una competencia de integración premia **exactitud** y **rapidez**. La rapidez no viene de escribir más de prisa, sino de *reconocer* qué técnica pide cada integral. Eso se entrena.

1. **Estudia por tu cuenta.** Este documento explica la base de cada técnica, pero no sustituye al estudio personal: se recomienda encarecidamente a cada participante buscar más material y estudiar por su cuenta (el capítulo de «Técnicas de integración» de cualquier libro de cálculo, como Stewart, Larson, Thomas o Zill; cursos y videos).
2. **Practica mucho y con variedad.** Integrar se aprende integrando: primero muchos ejercicios de cada técnica y después listas *mezcladas*, porque en la competencia nadie indica cuál técnica usar.
3. **Memoriza lo esencial.** La tabla básica, las 10 identidades trigonométricas, la tabla de sustitución trigonométrica y las formas de las fracciones parciales deben salir sin pensar.
4. **Sigue una ruta de decisión.** Ante una integral nueva, hazte estas preguntas en orden:

1.	¿Es definida, con intervalo simétrico o límites como 0 y $\frac{\pi}{2}$?	$\longrightarrow$	paridad o propiedad del rey
2.	¿Se puede simplificar o separar para llegar a la tabla básica?	$\longrightarrow$	antiderivadas elementales
3.	¿Aparece una función junto con su derivada?	$\longrightarrow$	sustitución u
4.	¿Es un producto de funciones de distinto tipo?	$\longrightarrow$	integración por partes
5.	¿Hay potencias o productos de funciones trigonométricas?	$\longrightarrow$	identidades
6.	¿Hay una raíz de una expresión cuadrática?	$\longrightarrow$	sustitución trigonométrica
7.	¿Es un cociente de polinomios?	$\longrightarrow$	fracciones parciales

5. **Entrena con cronómetro.** Resolver bien *contra el reloj* es otra habilidad: fija un tiempo por integral y redúcelo poco a poco.
6. **Verifica tus respuestas.** Derivar el resultado toma segundos y detecta casi cualquier error. En las definidas, revisa que el signo y el tamaño del resultado sean razonables.
7. **Cuida los detalles y escribe con orden.** El valor absoluto en los logaritmos, el signo menos de la integración por partes y el cambio de límites al sustituir; la mayoría de los errores son de signo o de transcripción. En la competencia *no es necesario* escribir la constante de integración $+C$ en las respuestas, aunque tampoco se penaliza.
8. **Si te atoras, cambia de enfoque.** Si una técnica no avanza después de unos renglones, regresa a la ruta de decisión y prueba otra; casi siempre hay un camino más corto.
9. **Aprende de cada error.** Lleva un registro de las integrales que fallaste y vuelve a resolverlas días después, sin ver la solución.
10. **Llega descansado y disfruta.** Una integral difícil es, ante todo, un buen acertijo.

Que no te intimiden. Algunas integrales pueden verse intimidantes a primera vista, pero la dificultad del Quetzal Integrador no será tan elevada como la de la *MIT Integration Bee*. Y, al final, el objetivo de la competencia es el aprendizaje.

Las reglas y el formato de la competencia se detallan en el documento *Especificaciones de la competencia*.

¡Mucho éxito, y que tu integral vuele tan alto como el quetzal!